Sur la régularité des solutions d'équations et de systèmes elliptiques

Dans ce cours, on s'intéresse à la résolution d'équations elliptiques avec divers types de conditions aux limites :

- Dirichlet
- Neumann
- Fourier-Robin

ou de systèmes d'équations elliptiques avec des conditions aux limites :

- Dirichlet
- Navier
- type Navier

On étudiera l'existence, l'unicité et la régularité des solutions :

- solutions faibles
- solutions fortes
- solutions très faibles

Cette régularité dépendra, comme on le verra, des données du problème et en particulier de la régularité du domaine. Par souci de clarté et de simplification, on examinera deux problèmes modèles, l'un faisant intervenir le laplacien et l'autre l'opérateur de Stokes.

Cours I

Espaces de Sobolev, Inégalités et problèmes de Dirichlet et de Neumann pour le laplacien. Partie I

1. Espaces de Sobolev

On introduit les espaces de Sobolev suivants:

- $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) ; \ \forall |\alpha| \leq m, \ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$
- $W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) ; \displaystyle\int_\Omega\int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}} < \infty,$

$\forall |\alpha| = m \}$

où $m \in \mathbb{N}$, $s = m + \sigma$, $0 < \sigma < 1$, $1 < p < \infty$

et Ω ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$.

Munis de la norme du graphe, ce sont des espaces de Banach.

* Cas spécifique $\Omega = \mathbb{R}^N$

- Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Hilbert

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) ; \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}$$

Proposition 1.

Pour tout $s \geq 0$, on a

$$H^s(\mathbb{R}^N) = W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$$

où l'identité est algébrique et topologique.

Définition.

Pour tout $s > 0$, on pose

$$W_0^{s,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}}$$

et son dual topologique

$$W^{-s,p'}(\Omega) = \left[W_0^{s,p}(\Omega) \right]'$$

où p' est le conjugué de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Notations

Si $p = 2$ et $s \geq 0$, on notera

$$W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$$

$$W_0^{s,2}(\Omega) = H_0^s(\Omega),$$

$$H^{-s}(\Omega) = [H_0^s(\Omega)]'$$

Proposition 2

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors $T \in W^{-m,p'}(\Omega)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ ssi $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha$, avec $f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$

2. Premières propriétés

On supposera à partir de maintenant que

Ω est un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$

Définition

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \left\{ v|_\Omega \; ; \; v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \right\}$$

Théorème 3

i) $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{s,p}(\Omega)$ pour tout $s > 0$ (vrai même si Ω est non borné)

ii) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Conséquence :

$$\forall s > 0, \quad W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N) = W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$$

et $$W^{-s,p'}(\mathbb{R}^N) = \left[W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \right]'$$

Attention :

En général pour $s > 0$

$$W_0^{s,p}(\Omega) \subsetneq W^{s,p}(\Omega)$$

Définition :

Pour $s > 0$, on pose

$$\widetilde{W}^{s,p}(\Omega) = \{ u \in W^{s,p}(\Omega) ; \ \tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \}$$

où $\tilde{u}$ est le prolongement par 0 de u en dehors de Ω.

L'espace $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ est un Banach pour la norme

$$\|u\|_{\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$$

Remarque

i) On vérifie facilement que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \widetilde{W}^{m,p}(\Omega) \qquad (1)$$

De plus, on montre que

$$\|u\|_{\widetilde{W}^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \qquad (2)$$

ii) Si $s = m + \sigma$ avec $0 < \sigma < 1$, on montre que

$$\|u\|_{\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)} \simeq \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \left\| \frac{D^\alpha u}{\rho^\sigma} \right\|_{L^p(\Omega)} \qquad (3)$$

Densité

Théorème 7

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ pour tout $s > 0$ (résultat vrai même si Ω est non borné)

Conséquence

On déduit de (1), (2) et de la définition de l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \widetilde{W}^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega) \tag{4}$$

Théorème 5

Pour tout $0 < s \leq \frac{1}{p}$, on a

$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W^{s,p}(\Omega)$

i.e

$$\forall\ 0 < s \leq \frac{1}{p}, \quad W_0^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega) \tag{5}$$

Notation

$$\rho(x) = d(x, \Gamma) \quad \text{où} \quad \Gamma = \partial\Omega$$

Théorème 6

Soit $0 < s \leq 1$ et $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$.

Alors

$$\frac{u}{\rho^s} \in L^p(\Omega) \iff s \neq \frac{1}{p}$$

et

$$\left\| \frac{u}{\rho^s} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \, |u|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

Remarque

Le cas $s = 1$ est connue sous le nom d'inégalité de Hardy :

$$\left\| \frac{u}{\rho} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Utilisant à nouveau une inégalité de Hardy, on montre le

Théorème 7

Soit $s > 0$ et $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$.

Alors, pour tout $|\alpha| \leq s$, on a

$$\frac{D^\alpha u}{\rho^{s-|\alpha|}} \in L^p(\Omega) \iff s - \frac{1}{p} \notin \mathbb{N} \quad (6)$$

De (3) et (6) on déduit le

Corollaire 8

Supposons $s > 0$ et $s - \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}$.

Alors

$$\widetilde{W}^{s,p}(\Omega) = W_0^{s,p}(\Omega). \quad (7)$$

Proposition 9

i) Pour tout $1 \leq j \leq N$, l'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow W^{s-1,p}(\mathbb{R}^N) \qquad (8)$$

est continu pour tout $s \in \mathbb{R}$

ii) Si on remplace $\mathbb{R}^N$ par Ω, la propriété (8) a lieu sauf si $s = \frac{1}{p}$

Idée de preuve du point ii)

- cas $s = m + \sigma$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq \sigma < 1$ (i.e $s \geq 1$)

Alors

$$u \in W^{s,p}(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in W^{m,p}(\Omega) \text{ et } \displaystyle\iint_{\Omega\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}} < \infty \\ \forall\, |\alpha| = m \end{cases}$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \in W^{m-1,p}(\Omega) \text{ et } \iint_{\Omega\,\Omega} \frac{\left|D^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) - D^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_j}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}} < \infty$$

pour tout $|\alpha| = m-1$. Et donc $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in W^{s-1,p}(\Omega)$

- <u>cas $s \leq 0$</u>

Soit $u \in W^{s,p}(\Omega) = \left[W_0^{-s,p'}(\Omega)\right]'$

$$= \left[W_0^{m+\sigma,p'}(\Omega)\right]'$$

Maintenant, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\left|\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}\right| = \left| -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}\right|$$

$$\leq \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\|_{W_0^{-s,p'}(\Omega)}$$

$$\leq \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \|\varphi\|_{W_0^{-s+1,p'}(\Omega)}$$

car $-s+1 \geq 1$ et i). On termine en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{-s+1,p'}(\Omega)$.

- <u>cas $0 < s < 1$</u>

Soit $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Rappelons que Ω étant borné lipschitz, il existe un opérateur

$\forall t \geq 0$, $P : W^{t,p}(\Omega) \longrightarrow W^{t,p}(\mathbb{R}^N)$

linéaire continu et vérifiant

$$Pv|_\Omega = v \quad , \quad v \in W^{t,p}(\Omega)$$

De sorte que $Pu \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ et par conséquent $\frac{\partial}{\partial x_j} Pu \in W^{s-1,p}(\mathbb{R}^N)$. Mais

$$\left(\frac{\partial Pu}{\partial x_j}\right)\Big|_{\Omega} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

i.e $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ est la restriction à Ω de la distribution $T = \frac{\partial Pu}{\partial x_j} \in W^{s-1,p}(\mathbb{R}^N)$. Plus précisément, on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)}$$

Ce qui implique que

$$\left|\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle\right| \leq \|T\|_{W^{s-1,p}(\mathbb{R}^N)} \|\tilde{\varphi}\|_{W^{1-s,p'}(\mathbb{R}^N)}$$

$$= \|T\|_{W^{s-1,p}(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{\tilde{W}^{1-s,p'}(\Omega)}$$

Ceci montre que $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \left[\tilde{W}^{1-s,p'}(\Omega)\right]'$

Mais

$$\left[\tilde{W}^{1-s,p'}(\Omega)\right]' = \left[W_0^{1-s,p'}(\Omega)\right]'$$

ssi $1-s \neq \frac{1}{p'}$, i.e $s \neq \frac{1}{p}$.

Remarque

La preuve précédente montre que

$$u \in W^{\frac{1}{p},p}(\Omega) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} \in \left[\widetilde{W}^{\frac{1}{p'},p'}\right]'$$

En particulier

$$u \in H^{1/2}(\Omega) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} \in \left[\widetilde{H}^{1/2}(\Omega)\right]'$$

où l'on remarque aussi que

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Omega) \underset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H^{1/2}(\Omega) = H_0^{1/2}(\Omega)$$

$$\Downarrow$$

$$H^{-1/2}(\Omega) = \left[H_0^{1/2}(\Omega)\right]' \hookrightarrow \left[\widetilde{H}^{1/2}(\Omega)\right]'.$$

Corollaire 10

Soit $s > 0$. On a la caractérisation suivante :

$$u \in \widetilde{W}^{s,p}(\Omega) \Longleftrightarrow \begin{cases} u \in W_0^{s,p}(\Omega) \text{ et } \forall |\alpha| = m \\ \dfrac{D^\alpha u}{\rho^\sigma} \in L^p(\Omega) \end{cases}$$

où $s = m + \sigma$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sigma < 1$

3. Traces

Tout d'abord, rappelons que

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N) \quad \text{si } s > \frac{N}{p}$$

De sorte que si $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ avec $s > \frac{N}{p}$, il est raisonnable de parler de la restriction de u à l'hyperplan $x_N = 0$. Mais la continuité de u par rapport à l'ensemble des variables n'est pas nécessaire. Il suffit d'avoir la continuité de u par rapport à la variable x_N. Ce qui est possible dès que $s > \frac{1}{p}$.

En fait, on a le

Théorème 11

On suppose que

$$s - \frac{1}{p} = k + \sigma \quad , \; k \in \mathbb{N} \; , \; 0 < \sigma < 1$$

(ce qui implique en particulier que $s - \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}$)

Alors, l'application

$$u \xmapsto{\gamma^{\prime}} (\gamma_0^{\prime} u, \gamma_1^{\prime} u, \dots, \gamma_k^{\prime} u)$$

où

$$\gamma_0^{\prime} u(x') = u(x', 0) \qquad , \; x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$$

$$\gamma_j^{\prime} u(x') = \frac{\partial^j u}{\partial x_N^j}(x', 0)$$

définie pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ possède une extension unique continue de

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \text{ dans } \prod_{j=0}^{k} W^{s-j-1/p,\, p}(\mathbb{R}^{N-1})$$

(où k = partie entière de $s > 0$).

De plus, cet opérateur a un inverse R à droite continue :

$$\begin{cases} \forall\, \vec{g} = (g_0, \dots, g_k) \in \prod_{j=0}^{k} W^{s-j-1/p,\, p}(\mathbb{R}^{N-1}), \\ \gamma_0^{\prime} R \vec{g} = \vec{g} \\ \|R\vec{g}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_N \sum_{j=0}^{k} \|g_j\|_{W^{s-j-1/p,\, p}(\mathbb{R}^{N-1})} \end{cases}$$

<u>Remarque</u>

Si $p = 2$, on procède par Fourier.

Ce résultat peut s'étendre lorsque $\mathbb{R}^{N-1}$ est remplacé par le bord Γ de Ω, à condition que Ω soit suffisament régulier

<u>Définition</u>

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On dira que Ω est lipschitzien (respectivement de classe $C^{k,1}$, $k \in \mathbb{N}$) si tout $x \in \Gamma$ possède un voisinage V de x dans $\mathbb{R}^N$ et un système de coordonnées $\{y_1, \dots, y_N\}$ tel que

i) V est un hypercube

$$V = \{ (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N ; \ |y_j| < a_j \ , \ 1 \leq j \leq N \}$$

ii) il existe une fonction φ et φ^{-1} lipschitziennes (resp^t $C^{k,1}$) définie dans

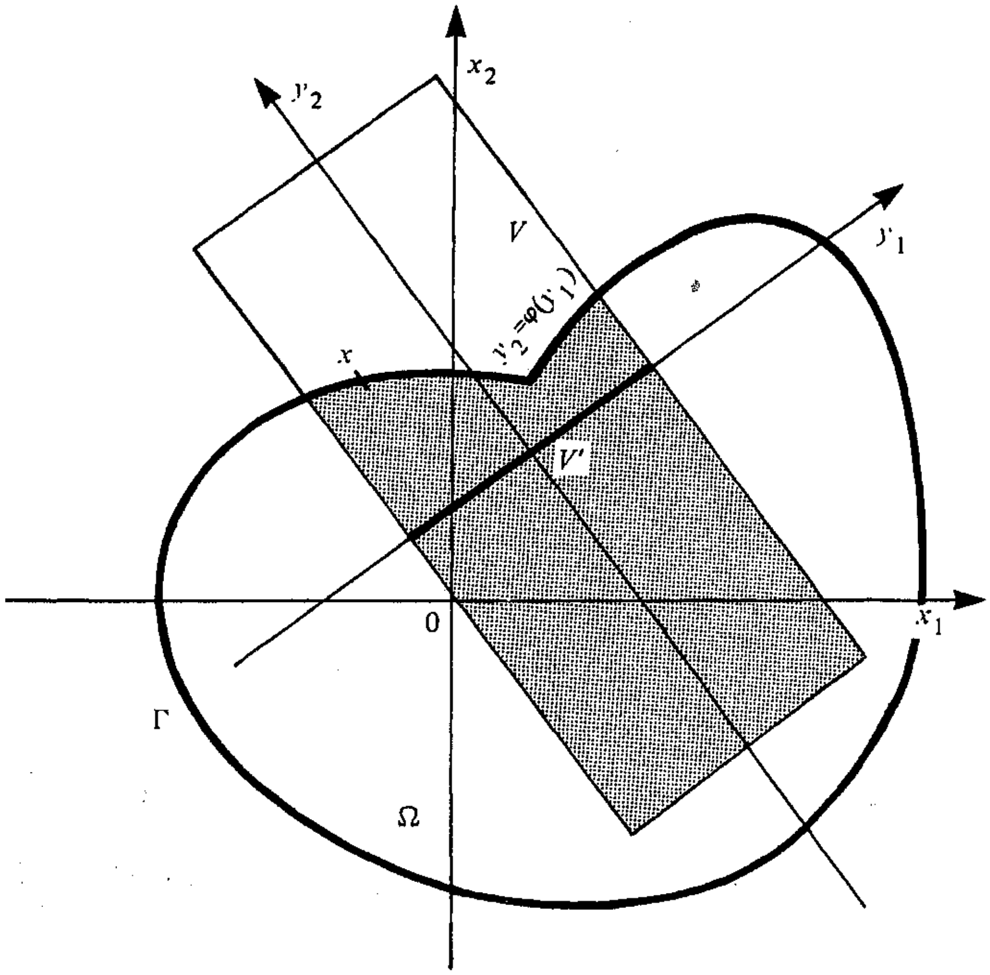
$$V' = \{ y' \in \mathbb{R}^{N-1} ; \ |y_j| < a_j \ , \ 1 \leq j \leq N-1 \}$$

et telle que

$$|\varphi(y')| \leq \tfrac{1}{2} a_N \qquad \forall y' \in V'$$

$$\Omega \cap V = \{ (y', y_N) \in V ; \ y_N < \varphi(y') \}$$

$$\Gamma \cap V = \{ (y', y_N) \in V ; \ y_N = \varphi(y') \}$$


x_2
y'_2
V
y'_1
$y'_2=\varphi(y'_1)$
x
V'
0
x_1
Γ
Ω

Soit

$$\Phi : y' \longmapsto (y', \varphi(y'))$$
$$V' \longrightarrow \Gamma \cap V$$

<u>Définition</u>

On suppose Ω ouvert borné de classe $C^{k,1}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Soit $0 < s \leq k+1$. On définit l'espace

$$W^{s,p}(\Gamma) = \{u \in \mathcal{D}'(\Gamma) ; \ u \circ \Phi \in W^{s,p}(V' \cap \Phi^{-1}(\Gamma \cap V))$$

pour tout couple (V, φ) vérifiant la définition précédente.

Etant donné (V_j, φ_j), $1 \leq j \leq J$, un atlas de Γ pour lequel chaque couple (V_j, φ_j) vérifie la définition ci-dessus, une manière possible de définir une norme sur $W^{s,p}(\Gamma)$ consiste à poser :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{J} \|u \circ \Phi_j\|_{W^{s,p}(V_j' \cap \Phi_j^{-1}(\Gamma \cap V_j))}$$

qui est équivalente lorsque $0 < s < 1$ à la norme

$$\left(\|u\|^p_{L^p(\Gamma)} + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N-1+sp}} \, d\sigma_x \, d\sigma_y \right)^{1/p}.$$

On est maintenant en mesure d'étendre le théorème 11 de traces du cas $\mathbb{R}^{N-1}$ au cas d'une frontière Γ suffisamment régulière, par un simple changement de variables.

Si localement, Γ est représentée par le couple (V, φ) et si φ est bilipschitzienne alors on peut définir un vecteur normal unité extérieur à Γ comme suit:

$$\vec{\nu}(y', \varphi(y')) = \frac{(-\nabla'\varphi(y'), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla'\varphi(y')|^2}} \quad , y' \in V'$$

On peut ensuite étendre ce vecteur dans tout V en posant

$$\vec{\nu}(y', y_N) = \vec{\nu}(y', \varphi(y')) \quad , y \in V$$

Comme $\Gamma \subset \bigcup_{j=1}^{J} V_j$, on sait qu'il existe des fonctions $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_J \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que

- $\forall j = 0, \dots, J$, $0 \leq \theta_j \leq 1$ et $\sum_{j=0}^{J} \theta_j = 1$

- supp θ_j est compact et supp $\theta_j \subset V_j$, $j \geq 1$

  supp $\theta_0 \subset \Omega \setminus \Gamma$

Cette partition de l'unité permet alors d'étendre $\vec{\nu}$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$ en écrivant

$$\vec{\nu} = \sum_{j=0}^{J} (\theta_j \vec{\nu})$$

Il est alors facile de vérifier que

$\vec{\nu} \in L^\infty(\overline{\Omega})$ si Γ est lipschitz

et $\vec{\nu} \in \mathcal{C}^{k-1,1}(\overline{\Omega})$ si Γ est $\mathcal{C}^{k,1}$.

On est maintenant prêt pour établir le résultat suivant :

Théorème 12 (**Traces**)

Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{k,1}$ de $\mathbb{R}^N$, avec $k \in \mathbb{N}$. Soit $s > 0$ vérifiant

$$s \leq k+1 \quad \text{et} \quad s - \frac{1}{p} = \ell + \sigma$$

avec $0 < \sigma < 1$ et $\ell \in \mathbb{N}$.

Alors l'application

$$u \xmapsto{\gamma} (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_\ell u)$$

définie pour $u \in C^{k,1}(\overline{\Omega})$ peut s'étendre de manière unique en une application linéaire continue de

$$W^{s,p}(\Omega) \text{ dans } \prod_{j=0}^{\ell} W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$$

où

$$\gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = \nabla u . \vec{\nu} \quad , \quad \gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \vec{\nu}^j}$$

De plus, cet opérateur a un inverse à droite continu (indépendant de p)

Cas Ω Lipschitz

$\frac{1}{p} < s \leq 1$,

- $u \in W^{s,p}(\Omega) \Rightarrow u|_\Gamma \in W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$
- $g \in W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \Rightarrow \begin{cases} \exists\, u \in W^{s,p}(\Omega) \text{ tel qu} \\ u = g \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$

avec

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\, \|g\|_{W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}$$

Cas Ω $C^{1,1}$

i) Soit $u \in W^{s,p}(\Omega)$

Si $\frac{1}{p} < s \leq 2$, alors $u|_\Gamma \in W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$

De plus, pour tout $g \in W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$,

il existe $u \in W^{s,p}(\Omega)$ tel que $u = g$

sur Γ, avec $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\|g\|_{W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}$

ii) Soit $u \in W^{s,p}(\Omega)$

Si $1+\frac{1}{p} < s \leq 2$, alors $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \in W^{s-1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$

De plus, pour tout $g_0 \in W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ et

$g_1 \in W^{s-1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, il existe $u \in W^{s,p}(\Omega)$

tel que

$$u = g_0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = g_1 \quad \text{sur } \Gamma$$

avec

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\left(\|g_0\|_{W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} + \|g_1\|_{W^{s-1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}\right)$$

Remarque.

Les relèvements précédents sont uniques à un élément près de $W_0^{s,p}(\Omega)$. En effet, lorsque $s - \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}$, l'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$ peut se caractériser de la manière suivante lorsque Ω est de classe $C^{k,1}$:

$$W_0^{s,p}(\Omega) = \{ u \in W^{s,p}(\Omega) \, ; \, \gamma_0 u = \gamma_1 u = \dots = \gamma_\ell u = 0 \}$$

où $s \leq k+1$

$$s - \frac{1}{p} = \ell + \sigma, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad 0 < \sigma < 1$$

4. Interpolation

On se contentera ici d'examiner le cas des espaces $H^s(\Omega)$, avec Ω ouvert borné lipschitzien.

Rappelons d'abord qu'il existe un opérateur de prolongement pour tout $s \geq 0$:

$$P : H^s(\Omega) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^N)$$

linéaire et continu, vérifiant :

$$Pu\big|_{\Omega} = u \quad , \quad \forall u \in H^s(\Omega)$$

Théorème 13 (Inégalité d'interpolation)

Soient s_1, s_2, s_2 avec $0 \leq s_1 < s_2 < s_3$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|u\|_{W^{s_2,p}(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{W^{s_3,p}(\Omega)} + K \varepsilon^{-(s_2-s_1)/(s_3-s_2)} \|u\|_{W^{s_1,p}(\Omega)}$$

où $K = K(\Omega, s_1, s_2, s_3, p)$

Remarque

L'inégalité ci dessus est une conséquence directe de l'injection compacte de $W^{s_3,p}(\Omega)$ dans $W^{s_2,p}(\Omega)$.